This question paper contains 8 printed pages]

HPAS (MAIN)—2017

MATHEMATICS

Paper I

Time : 3 Hours *Maximum Marks :* 100

Note :— The question paper has **8** questions. Answer any **5** questions. Question No. **1** is compulsory. *All* questions carry equal marks.

प्रश्नपत्र में 8 प्रश्न दिये गये हैं। किन्हीं 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न क्रमांक 1 अनिवार्य है। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (*a*) If A is a nilpotent matrix of index 2, show that $A(1 \pm nA) = A$, for n any positive integer.

यदि A एक सूचकांक 2 वाली शून्यभावी आव्यूह है तो प्रदर्शित कीजिए कि $A(1 \pm nA) = A$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

(*b*) Examine the curve $x = 6t^2, y = 4t^3 - 3t$ for concavity and convexity.

वक्र $x = 6t^2, y = 4t^3 - 3t$ की अवतलता एवं उत्तलता की जाँच कीजिए।

(*c*) Find the degree and order of the following differential equation :

$$\left|1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right|^{2/3} = \rho\frac{d^2y}{dx^2}$$

निम्न अवकल समीकरण की कोटि तथा घात का मान ज्ञात कीजिए :

$$\left|1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right|^{2/3} = \rho\frac{d^2y}{dx^2}$$

(*d*) If $r = xi + yj + zk$, then show that vector r is an irrotational vector.

यदि $r = xi + yj + zk$, तो प्रदर्शित कीजिए कि सदिश r एक आघूर्णीय सदिश है।

2. (a) Find the matrix representation of a linear transformation t on $V_3(R)$ defined as $t(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ corresponding to the following basis :

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$V_3(R)$ पर परिभाषित रैखिक रूपान्तरण $t(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ का निम्न आधार के सापेक्ष आव्यूह ज्ञात कीजिए :

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

(b) State and prove Cauchy Schwarz inequality.

कोशी स्वार्ज असमिका का कथन व सत्यापन दीजिए।

3. (a) Find the curve on which three points of intersection of the curve $x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ with the asymptotes lie.

उस वक्र को ज्ञात कीजिए जिस पर वक्र $x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ तथा इसकी अनन्तस्पर्शियों के तीन प्रतिच्छेद बिन्दु स्थित हैं।

(b) Prove that every bounded function need not to be Riemann integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध फलन आवश्यक रूप से रीमान समाकलनीय नहीं होता है।

4. (a) Find the condition that the straight line $\frac{l}{r} = \text{A} \cos \theta + \text{B} \sin \theta$, may touch the circle $r = 2a \cos \theta$.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा $\frac{l}{r} = \text{A} \cos \theta + \text{B} \sin \theta$, वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श करे।

(b) Find the equation of a sphere which passes through the point (1, 0, 0), (0, 1, 0) and (0, 0, 1) and has radius as small as possible.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 0, 0), (0, 1, 0) और (0, 0, 1) से गुजरता है तथा जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो।

5. (*a*) Solve by the method of variation of parameters the following differential equation :

$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2$$

प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2$$

(*b*) For Bessel's function $J_n(x)$, show that :

$$2nJ_n(x) = x\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

बेसेल्स फलन $J_n(x)$ के लिये प्रदर्शित कीजिए :

$$2nJ_n(x) = x\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

6. (*a*) Obtain Serret-Frenet's formula.

सेरेट-फ्रेनेट सूत्र प्राप्त कीजिए।

(*b*) Verify Stokes' theorem for the function $F = zi + xj + yk$ where C is the unit circle in the xy-plane bounding the hemisphere $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$.

स्टॉक्स प्रमेय का फलन $F = zi + xj + yk$ के लिए सत्यापन कीजिए जहाँ C एक xy-समतल का इकाई वृत्त है जो $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$ गोलार्ध को परिबद्ध किए हुए है।

7. (*a*) Five weightless rods of equal length are jointed together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD. If a weight W be attached to C and the system be suspended from A, show that there is a thrust in BD equal to $\frac{W}{\sqrt{3}}$.

समान लम्बाई की पाँच भारहीन छड़ें परस्पर जोड़ी गई हैं ताकि एक विकर्ण BD सहित समचतुर्भज ABCD बने। यदि C पर एक भार W बाँध दिया जाए और निकाय को A से लटकाया जाए तो सिद्ध कीजिए कि BD में प्रणोद $\frac{W}{\sqrt{3}}$ के तुल्य है।

(b) Two forces act, one along the line $y = 0$, $z = 0$ and the other along the line $x = 0$, $z = c$, as the forces vary, show that the surface generated by the central axis of their equivalent wrench is $(x^2 + y^2)\ z = cy^2$.

दो बल रेखा $y = 0$, $z = 0$ तथा $x = 0$, $z = c$, के अनुदिश क्रियाशील हैं। जब विचर हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि उनकी तुल्य रेन्च की अक्ष (केन्द्रीय) से जनित पृष्ठ $(x^2 + y^2)\ z = cy^2$ है।

8. (a) A particle moves in a curve so that its tangential and normal accelerations are equal and the angular velocity of the tangent is constant. Find the path.

एक कण एक वक्र में इस प्रकार चलता है कि इसके स्पर्शरिखीय तथा अभिलाम्बिक त्वरण सदा समान रहते हैं और इसकी स्पर्शरिखा का कोणीय वेग अचर रहता है। पथ ज्ञात कीजिए।

(*b*) A particle describes an ellipse under a force $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$ towards the focus. If it was projected with velocity V from a point distance r from the centre of force, show that its periodic time is $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r}-\frac{v^2}{\mu}\right]^{-3/2}$.

एक कण एक बल, जो कि $\frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$ है और नाभि की ओर है, के अधीन एक दीर्घवृत्त का निर्माण करता है। यदि इसे एक बिन्दु से, जिसकी दूरी बल केन्द्र से r है, V वेग से प्रक्षिप्त किया गया है, तो सिद्ध कीजिए कि इसका आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r}-\frac{v^2}{\mu}\right]^{-3/2}$ होगा।